

## ÇERÇEVELERDE GERİLME ANALİZİ

Gürol ÖNAL\*, Osman YİĞİT

Selçuk Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü, Kampüs, 42075 Konya

### Özet

Çalışmada statik yüklere maruz çerçevelerde bilgisayar yardımı ile yer değiştirmeler ve gerilme analizi araştırılmıştır. Düzlemsel çerçeveler ele alınmış, çerçeve elemanlarının ayrı ayrı eksenel ve eğilme zorlanmasına maruz kalmaları halinde eleman katılık matrisleri türetilmiştir. bu iki zorlanma tipinin aynı anda ortaya çıkması halindeki eleman katılık matrisi ise süperpozisyon prensibi ile elde edilmiştir.

Genel halde elde edilen denklemlerde yer değiştirmeler bilinmeyen büyüklükler olarak ortaya çıkmaktadır. Bu yer değiştirme değerleri yardımıyla gerilmelerin hesabı için gerekli teorik işlemler yapılmış ve algoritmalar oluşturulmuştur. Düzlemsel bir çerçeve elemanı bir düğüm noktasında üç adet serbestlik derecesine sahiptir. Diğer taraftan bir çerçeve sistemi genelde üç elemandan fazla eleman ihtiva eder. Bu durumda bahsedilen işlemlerin hemen bir kaç elemanlı sistemlerdeki gibi elle yapılamayacak derecede karmaşıklaştığı görülür. Bu, bir bilgisayar programını gerekli kılar. Bu amaçla Basic programlama dilinde iki program yazılmıştır. Programlar çözümü önceden bilinen bazı tipik örneklerle uygulanmış ve elde edilen sonuçlar literatürdeki sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Çerçeve sistemleri, gerilme analizi

## THE STRESS ANALYSIS OF FRAMES

### Abstract

Computer aided displacement and stress analysis of frames under static loads is investigated. In the first step, system equations of statically determined trusses are obtained and an algorithm is developed to transfer the coefficients matrix into a computer. The systems of linear equations are solved by Gauss-Elimination method.

---

\* Corresponding author. Tel: 90.332.2232565; Fax: 90.332.2414220  
E-mail address: [gonal@selcuk.edu.tr](mailto:gonal@selcuk.edu.tr)

The second step of the investigation deals with planar frames. The stiffness matrices for elements are derived for frames under axial and bending loads separately. The superposition technique is used for the cases where axial and bending loads are applied simultaneously.

For general cases, the displacements are obtained as unknowns in the equations. Theoretical calculations are performed and related algorithms are developed in order to compute stress values by these unknown strains.

A planar frame has three freedom degrees in a nodal point. On the other hand, a frame system generally has elements more than three. For these cases the calculations are tedious and much more complex for hand calculation. Therefore the use of a computer is inevitable for such cases. Two computer programs in BASIC were developed for this purpose. Trial runs were performed for accuracy test with some typical cases with known solutions. The results obtained are in agreement with the results of other investigations in the literature.

**Keywords :** Frame systems, stress analysis

## **1 Giriş**

Bir mühendislik yapısına etki eden çeşitli kuvvetleri, güvenlik sınırı içinde taşıyan ve elemanları aracılığı ile bu kuvvetleri zemine aktaran sistemlere taşıyıcı sistemler denir. Taşıyıcı sistemler genel olarak kafes sistemleri ve çerçeveler olarak ikiye ayrılabilir [1,2,3].

Bir kaç çubuktan ibaret taşıyıcı sistemlerde çözüm elle yapılabilir. Ancak eleman sayısı arttığında çözümün elle yapılması çok zordur. eleman sayısının artması işlemleri artırmakta ve hata ihtimalini yükseltmektedir. Bunun için gelişen teknolojiye bilgisayardan faydalanmak ve programlar hazırlayarak bu problemlerin çözümünü kolaylaştırmak gerekir. Çok karmaşık taşıyıcı sistemler çok kısa zamanda bu programlarla çözülebilir. Buda büyük kolaylık sağlar.

Çerçevelerde bilgisayar kullanımını gerekli kılan ilk çalışmalar 1940 yılında başladı. Ancak o yıllarda büyük bilgisayarlar yoktu. Büyük bilgisayarların devreye girdiği ellili ve altmışlı yıllarda karmaşık yapılarda matris metodları kullanılmaya başlandı.[4,5].

Mekanik problemlerdeki ilk bilgisayar kullanımı lineer elastik yapı mekaniği safhasında olmuştur. Bu tip problemleri çözen programlar paket haline getirilmiştir. Ancak bu paketlerin program listeleri gizlidir. Günümüzde bu tip programlar çentik ve çatlak problemlerinin araştırılmasında, döner simetrik elemanların analizinde, plak ve kabukların analizinde kullanılmaktadır. Son zamanlarda elastik olmayan şekil değiştirme problemlerinin çözümüyle de uğraşmaktadır [5].

Konstrüksiyon mühendisliğinde bilgisayarın gerilme analizine uygulanması, katı cisimler mekaniği ve bilgisayar programcılığı konularında temel bilgileri gerektirir. Katı cisimler mekaniğindeki temel kavramları inceleyen yayın sayısı oldukça fazladır. Sonlu elemanlar metodunun ihtiyacına cevap verecek temel matris bilgileri de çeşitli kaynaklarda mevcuttur. Matris metodları ayrıca mekanik problemlerin yanında ısı transferi, akışkanlar mekaniği, taban suyu problemlerinin çözümünde de kullanılmaktadır [6]. Bu kullanım sahalarının hepsinde ortak noktalar vardır. Bu çalışmada temel esasları kavramak için yapılmıştır.

## 2 Çerçevelerde Gerilme Analizi İçin Algoritma Oluşturulması

### 2.1 Genel Halde Kuvvet Yerdeğiştirme Bağıntısının Çıkarılması

Elastisite teorisindeki problemlerin sonucu ya verilen sınır şartları içinde belirleyici diferansiyel denklemleri çözmekle veya gerilme bileşenlerini ve uygulanan yükler tarafından yapılan iç ve dış işe bağlı bir integral büyüklüğün minimize edilmesi ile bulunur. Eğer sınır şartlarını sağlayan yer değiştirme eşitlikleri seçilerek işe başlanırsa sistemin potansiyel enerjisi minimize edilmelidir. Yok eğer gerilme sınır şartlarını sağlayan gerilme bağıntıları seçilerek işe başlanırsa sistemin komplemanter enerjisinin minimize edilmesi gerekir. En yaygın sonlu elemanlar formülasyonu bir yer değiştirme alanı kabulü ile işe başlayıp, düğüm noktası yer değiştirme değerlerini bulmak için potansiyel enerjiyi minimize etmektir. Yer değiştirmeler bilinirse birim uzama ve gerilmeler bulunabilir [6].

Sonlu elemanlar formülasyonu potansiyel enerjinin minimizasyonuna dayandığına göre, potansiyel enerji teoreminin tam ifadesi burada Verilen sınır şartlarını sağlayan deplasmanlardan, potansiyel enerji değerini minimum yapanları denge denklemlerini sağlarlar" şeklinde verilebilir.

Bu teoremin gerekli şartı şöyledir: Seçilen yer değiştirme eşitlikleri, yer değiştirme şartlarını sağlamalıdır. Elastik bir sistemin toplam potansiyel enerjisi iki bileşene ayrılabilir; cisimdeki şekil değiştirme enerjisinden oluşan bir bileşen ve iç ve dıştan uygulanan kuvvetlerin potansiyel enerjisine bağlı bir bileşen

Toplam potansiyel enerji :  $\Pi$

$$\Pi = \Lambda + W_p \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir [6]. Burada  $W_p$ , uygulanan yüklerin potansiyel enerjisi ve  $\Lambda$  şekil değiştirme enerjisidir. Yükler tarafından yapılan iş potansiyel enerjilerinin negatif işaretlisidir. Yani

$$W = -W_p \quad (2.2)$$

dir. Bu durumda (2. 1) eşitliği

$$\Pi = \Lambda - W \quad (2.3)$$

şeklini alır. Verilen bölgenin sonlu sayıda elemana bölündüğü düşünülerek potansiyel enerji ifadesi

$$\Pi = \sum_{e=1}^E (\Lambda_{(e)} - W_{(e)}) = \sum_{e=1}^E \Pi_{(e)} \quad (2.4)$$

şeklinde ifade edilir.

Genel halde  $dV$  hacmindeki diferansiyel eleman için birim şekil değiştirme enerjisi

$$d\Lambda = \frac{1}{2} \{ \varepsilon^T \} \{ \sigma \} dV \quad (2.5)$$

dir. Burada  $\varepsilon$ , toplam birim şekil değiştirmeyi,  $dV$  birim şekil değiştirme enerjisi yoğunluğunu göstermektedir. Toplam birim şekil değiştirme enerjisi bütün hacimde bu

değerin integrasyonu ile bulunur.  $\{ \varepsilon \}$  ve  $\{ \sigma \}$  vektörleri çözülecek probleme bağlıdır. Mesala iki boyutlu düzlemsel gerilme hali için;

$$\{ \varepsilon \}^T = [\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{xy}] \text{ ve } \{ \sigma \}^T = [\sigma_{xx} \sigma_{yy} \tau_{xy}] \quad (2.6)$$

dir. Elastisite teorisi iki önemli sonuç verir:

1-Hook Kanunu

$$\{ \sigma \} = [D] \{ \varepsilon \} \quad (2.7)$$

2-Yer değiştirme birim şekil değiştirme bağıntıları;

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.8)$$

Burada u,v,w sırasıyla x,y,z yönündeki yer değiştirmeleri göstermektedir. Bunlar şekil fonksiyonları yardımı ile aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\{ u \} = [N] \{ U \} \quad (3.9)$$

Burada [N]:Şekil fonksiyonu matrisi olarak adlandırılır. [N] 'nin elemanlarının ifadesi yapı elemanlarına göre değişir. Bu çalışmada kullanılan elemanlara ait  $N_i$  ifadeleri 2. 2. 1 ve 2. 2. 2' de verilmiştir. (2. 8) eşitlikleri  $\{ \varepsilon \}$  birim uzama vektörünün,  $\{ U \}$  vektörü yardımı ile

$$\{ \varepsilon \} = [B] \{ U \} \quad (2.10)$$

şeklinde yazılmasını mümkün kılar. Burada [B], [N]' nin türevidir. [B]' nin gerçek değeri çözülecek problemin tipine ve kullanılan elemana bağlıdır. (2. 7) ve (2. 10) eşitlikleri kullanılarak tek bir eleman için birim şekil değiştirme enerjisi

$$\Lambda_{(e)} = \int_{V_{(e)}} \frac{1}{2} (\{U\}^T [B_{(e)}]^T [D_{(e)}] [B_{(e)}] \{U\}) \quad (2. 11)$$

şeklinde yazılabilir. Düğüm noktasında uygulanan dış yükler {P} ve düğüm noktası yer değiştirmeleri {U} olduğuna göre dış yükler tarafından yapılan iş

$$W = \{U\}^T \{P\} = \{P\}^T \{U\} \quad (2. 12)$$

matris çarpımı ile verilir. Bu tanımlama kuvvetlerin, yer değiştirme bileşenlerine paralel bileşenlerine ayrılarak işlem yapıldığını gösterir. Bu durumda bütün sistem için toplam potansiyel enerji ifadesi (2. 4) yardımıyla

$$\Pi_{(e)} = \sum_{e=1}^E \left[ \int_{V_{(e)}} \frac{1}{2} \{U\}^T [B_{(e)}]^T [D_{(e)}] [B_{(e)}] \{U\} dV \right] - \{U\}^T \{P\} \quad (2. 13)$$

olarak bulunur  $\Pi$ 'yi minimize etmek için {U}'ya göre türev alınıp sıfıra eşitlenmesi gerekir. Bu işlem yapılırsa

$$\frac{\delta \Pi}{\delta u} = \sum_{e=1}^E \left[ \int_{V_{(e)}} \frac{1}{2} [B_{(e)}]^T [D_{(e)}] [B_{(e)}] dV \{U\} \right] - \{P\} = 0 \quad (2. 14)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikteki

$$[k_{(e)}] = \int_{V_{(e)}} [B_{(e)}]^T [D_{(e)}] [B_{(e)}] dV \quad (2. 15)$$

ifadesi eleman katılık matrisi olarak adlandırılır. [P] de sisteme uygulanan dış yük vektörünü göstermektedir. Bu durumda sistem eşitliği basitçe

$$[K]\{u\}=\{P\} \quad (2.16)$$

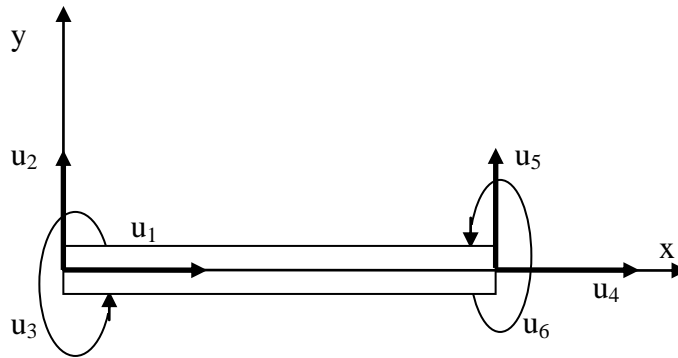
şeklinde ifade edilebilir. Burada  $[K]$  matrisi sistem katılık matrisi olup

$$[K]=\sum_{e=1}^E [k_{(e)}] \quad (3.17)$$

şeklinde verilir [7,8].

## 2. 2 Düzlemsel Çerçeve Elemanı

Düzlemsel çerçeve elemanı düzlemsel bir çubuk olup aksenal kuvvete, eğilme momentine ve kesme kuvvetlerine direnç gösterir. Kuvvetler neticesinde düğüm noktalarının hareket edebileceği doğrultular (serbestlik dereceleri) Şekil 1 de gösterilmiştir [9].



Şekil 1 Düzlemsel çubuk elemanının serbestlik derecesi

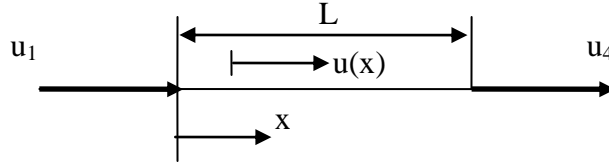
Düzlemsel çerçeve elemanının rijitlik matrisi 6X6 lık bir matristir. Bu 6X6 lık matris elemanın sadece aksenal zorlanma durumundaki 2X2 lik ve sadece eğilme zorlanması durumunda 4X4 lük iki alt matristen oluşur. Bu zorlanma halleri mukavemette birbirinden bağımsız olarak verilir.

Bu durumda düzlemsel çerçeve elemanı ayrı ayrı iki zorlanma tipine maruz bırakılır. Sonra ortaya çıkan eşitlikler süperpoze edilir.

### 2. 2. 1 Düzlemsel Çerçeve Elemanının Sadece Aksenal Zorlanması Hali

Şekil 2'de görüldüğü gibi elemanın  $u_1$  ve  $u_4$  olmak üzere iki düğüm noktası deplasmanı mevcuttur. [9]. Elemanın herhangi bir düğüm noktasındaki yer değiştirme miktarı için, yer değiştirme fonksiyonunun lineer olduğu kabulü ile

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (2.18)$$



Şekil 2 Düzlemsel çerçeve elemanı sadece eksenel zorlanması hali

eşitliği geçerlidir. Bu eşitlik

$$x=0 \text{ da } u(x)=u_1 \quad (2.19)$$

$$x=L \text{ de } u(x)=u_4 \quad (2.20)$$

sınır şartlarının kullanılmasıyla

$$u(x) = [N] \{ u_a \} \quad (2.21)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$[N] = \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{x}{L}\right) \right], \quad \{ u_a \} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

dir.

$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$  olduğundan  $\epsilon_{xx} = -\frac{u_1}{L} + \frac{u_4}{L}$  bulunur. Buda matris formunda

$$\epsilon_{xx} = \left[ \left(-\frac{1}{L}\right) \left(\frac{1}{L}\right) \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

olarak yazılabilir. Buradan gerilme  $\{ \sigma \} = [D] \{ \epsilon \}$  olarak ortaya çıkar. Bu tip zorlanmada  $[D]$  matrisi bir tek elemandan oluşmuştur. Yani  $[D]=[E]$  dir. Diğer taraftan birim şekil değiştirme ve gerilme büyüklükleri de

$$\{ \epsilon \} = \{ \epsilon_{xx} \} \quad (2.24)$$



şeklindedir. (2. 10) daki [B] matrisi bu zorlanma hali için

$$[B] = \left[ \left( -\frac{1}{L} \right) \left( \frac{1}{L} \right) \right] \quad (2. 25)$$

şeklindedir. Bu durumda (2. 15) de ifade edilen  $[K_{(e)}]$  matrisi

$$[k_{(e)}]_{2 \times 2} = \int_{V_{(e)}} [B]^T [D] [B] dV = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2. 26)$$

şeklinde ortaya çıkar.

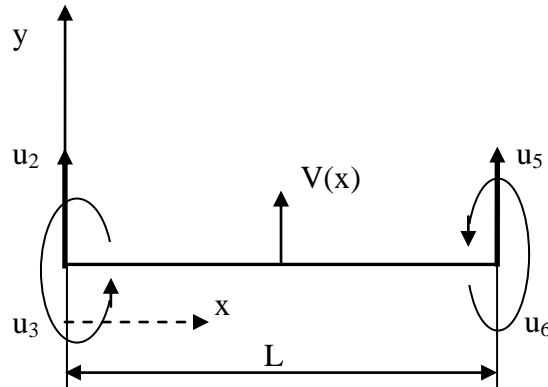
Burada A; elemanın kesit alanı,  $[K(e)]$ ; eleman katılık matrisidir. Bu durumda elemanın ucundaki kuvvetlerle, yer değiştirmeler arasında

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (2. 27)$$

bağıntısı vardır.

### 2. 2. 2 Düzlemsel Çerçeve Elemanının Sadece Eğilme Zorlanması Hali

Sadece eğilme zorlanmasına maruz çubuk deplasmanları Şekil 3'deki gibidir. [4],[9],[10]



Şekil 3 Düzlemsel çubuk elemanının sadece eğilme zorlanması hali

Bu zorlanma halinde elemanın düğüm noktalarının yer değiştirmeleri  $u_2, u_3, u_5, u_6$  dir. Çubuk boyunca  $y$  doğrultusundaki  $v$  yer değiştirmeleri için

$$V(x) = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3 \quad (2.28)$$

şeklinde bir polinom seçilirse  $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$  sabitleri

$$x = 0 \text{ da } V(x) = u_2 \text{ ve } \frac{dV(x)}{dx} = u_3 \quad (2.29)$$

$$x = L \text{ da } V(x) = u_5 \text{ ve } \frac{dV(x)}{dx} = u_6 \quad (2.30)$$

sınır şartları yardımı ile bulunabilir. Bu şekilde elde edilen dört adet denklem  $\alpha_i$  'ye göre çözülür bulunan  $\alpha_i$  ler (2.28) de yerine konur ve bu ifade  $u_i$  'ye göre düzenlenirse

$$N_1(X) = (2X^3 - 3LX^2 + L^3)/L^3,$$

$$N_2(X) = (X^3 - 2LX^2 + L^2X)/L^3,$$

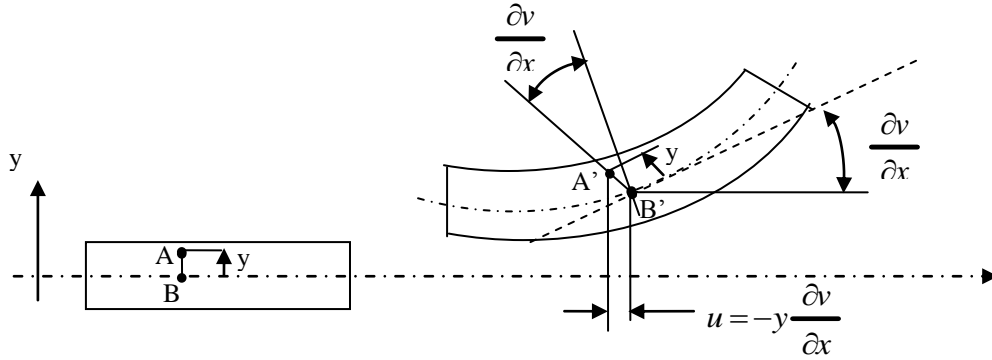
$$N_3(X) = -(2X^3 - 3LX^2)/L^3,$$

$$N_4(X) = (X^3 - LX^2)/L^2,$$

olmak üzere (2.28) denklemi

$$V(x) = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] [U] \quad (2.31)$$

şeklini alır. Çubuk teorisinden kirişlerin düzlemsel kesitlerinin eğilmeden sonra da düzlemsel kaldıkları bilinmektedir. Bu sebeple kirişin aksenal deplasmanı  $u$ , enine deplasmanı  $v$  yardımıyla ifade edilebilir. (Şekil 4) [9].



Şekil 4 x, y düzlemindeki eğilmeye zorlanan çubuk

Burada  $u = -y \frac{\partial v}{\partial x}$  'dir. y ilgilenilen noktanın asal eksenden uzaklığını göstermektedir.

Eksenel birim uzama ise

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.32)$$

eşitliği ile verilir. Bu durumda

$$\varepsilon_{xx} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = [B] \{U_{eğ}\} \quad (2.33)$$

dir. Burada

$$[B] = -y/L^3 \{ (12x-6L) L(6x-4L) - (12x-6L) L(6x-2L) \} \quad (2.34)$$

şeklindedir. Eksenel doğrultudaki gerilmeye

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad (2.35)$$

olarak ifade edilir.  $[D] = [E]$  olduğu dikkate alınarak bu zorlanmada (2. 15) eşitliğinin integrale alma işlemi yapılırsa bu elemana ait katılık matrisi

$$[K_{eg}^e]_{4 \times 4} = \frac{EL_{zz}}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

şeklinde bulunur. Burada  $I_{zz} = \int_{A(e)} y^2 dA$  z eksenine göre kesitin atalet momentidir.

Bu elemanda da çubuk uç kuvvetleri ile uc deplasmanları arasındaki bağıntı eleman katılık matrisi yardımıyla

$$\begin{bmatrix} f_2 \\ M_3 \\ f_5 \\ M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

olarak ortaya çıkar. [4],[9]

### 2. 2. 3 Genel Halde Zorlanmaya Maruz Çerçeve Elemanı

2.2.1 ve 2.2.2’de bahsedilen zorlanma tipleri birbirinden bağımsız olarak incelenmişti. Çubuğun genel olarak zorlanması halinde daha önce ayrı ayrı bulunan katılık matrisleri süperpozisyon prensibi ile birleştirilir. Bu işlem şöyle yapılır. (2. 27), (2. 37) eşitlikleri genel yer değiştirme vektörü

$$[U] = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6]^T \quad (2.38)$$

olmak üzere, genel kuvvet vektörü de

$$[f] = [f_1 \ f_2 \ M_3 \ f_4 \ f_5 \ M_6] \quad (2.39)$$

olmak üzere

$$[f] = [k] [u] \quad (2.40)$$

eşitliği sağlanacak şekilde ayrı ayrı genişletilir. Bu genişletme esnasında [k] katılık matrisinde ortaya çıkan yer değiştirmelerle ilgili satır ve sütunlar sıfır değerine eşit olacaktır. Daha sonra ayrı ayrı genişletilmiş bu matris eşitlikleri taraf tarafa toplanarak

$$[f] = [k_{\text{çe}}] [u] \quad (2.41)$$

genel düzlemsel halde aksenal ve eğilme zorlanmasına maruz çubuk eleman eşitliği bulunur. Burada [k<sub>çe</sub>] genel düzlemsel eğilme ve aksenal zorlanmaya maruz elemana ait katılık matrisi olup

$$T = E I_{zz} / L^3 \quad (2.42)$$

olmak üzere

$$[k_{\text{çe}}] = \begin{bmatrix} AE/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12T & 6LT & 0 & 12T & 6LT \\ 0 & 6LT & 4L^2T & 0 & 6LT & 2L^2T \\ -AE/L & 0 & 0 & AE/L & 0 & 0 \\ 0 & -12T & -6LT & 0 & 12T & -6LT \\ 0 & 6LT & 2L^2 & 0 & 6LT & 4L^2T \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

şeklindedir [4],[5],[9].

### 2.3 Koordinat Dönüşümü

Eleman eşitliği  $[f] = [k] [u]$  düğüm kuvvetleri ile yer değiştirmeleri arasındaki bağıntıyı, eleman koordinat sisteminde vermektedir. Halbuki büyüklüklerin düzlemde X,Y referans koordinat sisteminde ifade edilmiş olması gerekir.

[u]: Eleman düğüm noktalarının eleman koordinat sistemindeki yer değiştirme vektörü,

[U]: Elemanın düğüm noktalarının referans koordinat sistemindeki yer değiştirme vektörü olmak üzere bu iki vektör arasında

$$[u] = [\lambda] [U] \quad (2.44)$$

bağıntısı yazılabilir. Burada  $[\lambda]$  transformasyon matrisi olup, bu matrisin elemanları, eleman koordinat sistemi eksenlerinin referans koordinat sistemindeki doğrultman kosinüslerinden oluşmaktadır.  $[\lambda]$  nin oluşturulması Bölüm 2.4'de verilmiştir. (2.40) eşitliğine benzer bir bağıntı, düğüm kuvvetlerinin eleman koordinat sistemindeki ve referans koordinat sistemindeki ifadeleri arasında da

$$[f] = [\lambda] [F] \quad (2.45)$$

olarak yazılabilir. Referans koordinat sisteminde

$$[F] = [K] [U] \quad (2.46)$$

bağıntısını verecek eleman katılık matrisi  $[K]$  aranmaktadır. (2.40) daki  $[f]$  yerine (2.45) deki eşdeğeri, yine (2.40) da ki  $[u]$  yerine (2.44) deki eşdeğeri yerine konursa

$$[\lambda] [F] = [k] [\lambda] [U] \quad (2.47)$$

eşitliği ve buradan da her iki tarafın  $[\lambda]$  ile çarpılmasıyla

$$[F] = [\lambda]^{-1} [K] [\lambda] [U] \quad (2.48)$$

eşitliği bulunur. Transformasyon matrisi ortogonal bir matris olup

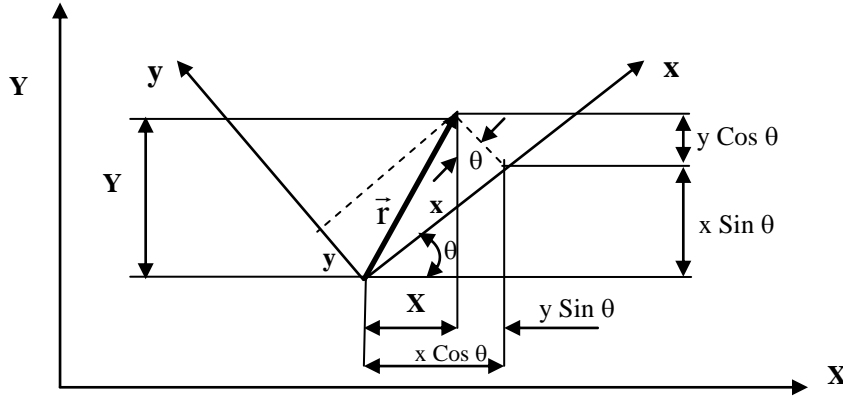
$$[\lambda]^{-1} = [\lambda] \quad (2.49)$$

özelliğini taşıdığı dikkate alınırsa (2.48) eşitliğinden eleman katılık matrisi referans koordinat sistemindeki ifadesi ortaya çıkar [9, 10].

$$[K] = [\lambda] [k] [\lambda] \quad (2.50)$$

## 2. 4 Transformasyon Matrisinin Oluşturulması

(x,y) eksen takımında ifade edilmiş bir vektörel büyüklüğün, (X,Y) eksen takımında ifade edilmesi esnasında transformasyon matrisinden faydalanılır. Şöyle ki Şekil 5’de (x,y) eksen takımında verilen bir  $\vec{r}$  vektörü



Şekil 5 Bir  $[\vec{r}]$ ’ nün referans koordinat sisteminde görünümü

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} \quad (2. 51)$$

olarak ifade edilmiş olsun. Bu durumda aynı vektörü referans eksen takımında ifade eden X,Y büyüklükleri ile x,y büyüklükleri arasında Şekil 5 yardımı ile

$$X = x \cos \theta - y \sin \theta \quad (2. 52)$$

$$Y = x \sin \theta + y \cos \theta \quad (2. 53)$$

bağıntısı yazılabilir. Bu bağıntı

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (2. 54)$$

şeklinde ifade edilebilir. Diğer taraftan referans eksen takımında bilinen değerler,eleman eksen takımında hangi değerleri alır? Sorusuna cevap verebilmek için ise (2. 54) eşitliğindeki x,y çözülür.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

bulunur. İncelenen konuda elemanın bir ucunun x ve y doğrultusundaki deplasmanının yanında z eksenini etrafında dönmeside söz konusudur. x ve y nin eksen takımlarının değişmesine göre değer alması söz konusu iken, dönme miktarının sayısal ifadesi koordinat sistemine bağlı değildir. Bu durumda x,y,  $\phi$  yer değiştirmeleri X, Y,  $\phi$  yer değiştirmeleri arasında

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \phi \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

bağıntısı vardır. Burada eşitliğin sağındaki 3X3 lük matris transformasyon matrisi adını alır. Çubuğun her iki ucundaki yer değiştirme dikkate alınır ve  $\cos\theta = c_1$ ,  $\sin\theta = c_2$  ile gösterilirse bir elemana ait düğüm noktaları yer değiştirmelerinin eleman ve referans eksen takımındaki ifadesi arasında

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \phi_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \phi_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

bağıntısı elde edilir. Burada sağdaki 6X6 lük matris çubuğun iki ucundaki büyüklükler arasında dönüşümü sağlayacak şekilde ifade edilmiş transformasyon matrisidir ve  $\lambda$  ile gösterilir.

## 2. 5 Sistem Denklemlerinin Teşkili

Referans koordinat sisteminde her bir elemana ait eleman eşitlikleri bulunduğundan sonraki adım sistem denklemlerinin teşkilidir. Bir düğüm noktasında birleşen elemanların o düğüm noktasındaki uçlarının yer değiştirme miktarı birbirine eşittir.



Düzlemde bir düğüm noktasındaki serbestlik derecesinin kesme ve eksenel kuvvet, eğilme momenti olduğu daha önceden belirtilmişti. Bir düzlemdeki düğüm sayısı N ise bu durumda toplam serbestlik derecesi

$$N_t = 3 \cdot N \quad (2.58)$$

olur. Bu durumda katılık matrisimizde  $N_t \cdot N_t$  boyutunda bir matris olur. Sistem yer değiştirme vektörü [U] ve dış yük vektörü de [P] de  $N_t$  boyutunda bir vektör olacaktır. Bir elemana ait

$$[F] = [k][U] \quad (2.59)$$

eşitliğindeki [F] ve [U] vektörleri düzlemsel çubuk elemanlarda

$$[F] = [f_1 \ f_2 \ M_3 \ f_4 \ f_5 \ M_6] \quad [U] = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6] \quad (2.60)$$

olur. (2.16) sistem denklemlerini elde etmek için eleman eşitliklerinin sistem boyutunda genişletilmesi gerekir. Bütün elemanlar için genişletilmiş matrisler elde edildikten sonra taraf tarafa toplanırsa

$$[K][U] = \{P\} \quad (2.61)$$

denklemleri elde edilir.

## 2.6 Gerilmelerin Hesabı

Düzlemsel çerçevelerde elemanlar eksenel zorlanmayla birlikte eğilme zorlanmasına da maruz kaldıklarına göre ortaya çıkan gerilmelerin hesabı bu iki zorlanmada oluşan gerilmelerin toplamı şeklinde olması gerekir. Zira mukavemette iki zorlanma hali birbirinden bağımsız olarak irdelenir. Bu durumda eksenel zorlanmada oluşan gerilmelerin (2.23) ve (2.24) yardımıyla

$$\sigma = E \begin{bmatrix} (-1/L) & (1/L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

şeklinde bir eşitlikle, eğilme zorlanmasından oluşan gerilmeler ise (2.33) ve (2.35) yardımıyla

$$\sigma = E \left\{ -\frac{y}{L^3} \left[ (12X - 6L) \begin{matrix} u_2 \\ u_3 \\ u_5 \\ u_6 \end{matrix} + L(6X - 4L) \begin{matrix} u_2 \\ u_3 \\ u_5 \\ u_6 \end{matrix} - (12X - 6L) \begin{matrix} u_2 \\ u_3 \\ u_5 \\ u_6 \end{matrix} + L(6X - 2L) \begin{matrix} u_2 \\ u_3 \\ u_5 \\ u_6 \end{matrix} \right] \right\} \quad (2.63)$$

şeklinde bir eşitlikten bulunur. (2.62) ve (2.63) ün sağındaki u yer değiştirme vektörleri eleman eksen takımında ifade edilen büyüklüklerdir. Hazırlanan bilgisayar programında bu u büyüklükleri, referans eksen takımında ifade edilen {U} büyüklüklerinden transformasyon matrisi yardımı ile hesaplanmıştır. (3.63)'ün hesabında fazla bir problemle karşılaşılmaz. Ancak (2.63) de gerilmelerin x ve y ile değiştiği görülmektedir. Pratik mühendislik açısından, bu değişimin nasıl olduğundan ziyade, maksimum gerilmenin nerede olduğu daha önemlidir. Bu durumda (2.63) ün maksimum değeri y' nin en büyük olduğu yerde ortaya çıkar. Diğer taraftan bu eşitlik açılırsa

$$\sigma = \frac{-E y}{L^3} \left[ (12X - 6L)u_2 + L(6X - 4L)u_3 - (12X - 6L)u_5 + L(6X - 2L)u_6 \right] \quad (2.64)$$

ifadesinin x'e göre lineer olduğu görülür. Buradan da çubuk elemanlarındaki maksimum gerilmenin çubuk uçlarında olduğu anlaşılır.

Bu durumda x = 0 ve x = L konumlarındaki eğilme gerilmesi (2.64) eşitliğinden y = c olduğu da dikkate alınarak

x=0 için,

$$\sigma = \frac{-E c}{L^3} \left[ (-6L)u_2 - (4L^2)u_3 + (6L)u_5 - (2L^2)u_6 \right] \quad (2.65)$$

x=L için,

$$\sigma = \frac{-E c}{L^3} \left[ (6L)u_2 + (2L^2)u_3 - (6L)u_5 + (4L^2)u_6 \right] \quad (2.66)$$

elde edilir. Eğilme gerilmelerinin tarafsız eksene göre,basma ve çekme şeklinde olduğu dikkate alınırsa maksimum gerilme için bunlardan hangisinin alınacağını aksenal gerilmenin cinsi tayin eder.

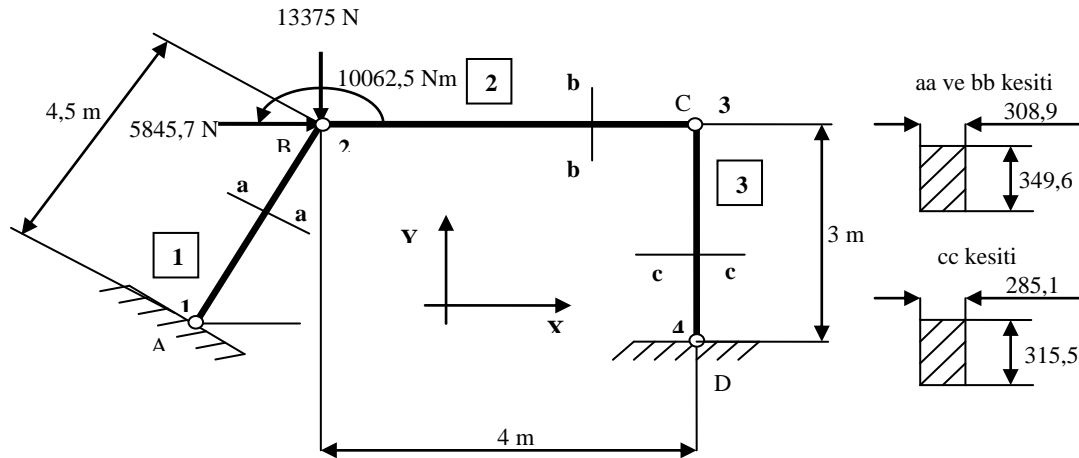
### 3 Örnek Uygulama

#### 3.1 Çerçeveselerde Gerilme Analizine ait Bir Örnek

Çerçeveselerle ilgili olarak gerilme analizi problemin doğruluğunu kontrol için bir örnek seçilmiştir. Bu örneğin alındığı kaynak da sonuç olarak çerçeveyi oluşturan elemanların uç noktalarına gelen kuvvet ve moment değerleri verilmiştir. Gerilme değerleri mevcut değildir. Kaynakta bulunan kuvvet ve moment değerlerinden faydalanarak gerilmeler elle ve yazılan programla hesaplatılmış, sonuçlar karşılaştırılmıştır [11].

#### Örnek

Şekil 6'daki çerçevenin gerilme analizi istenmektedir.



Şekil 6 Örnek 'e ait düzlemsel çerçeve sistemi [4]

#### Çözüm

Bu problemlerde gerilme analizi için yazılan program kullanılmıştır. Bu çerçeve sistemi için giriş dataları aşağıdaki gibidir.

$$\text{Mesnet tepkisi sayısı} = 6 , \quad \text{Eleman sayısı} = 3 ,$$

$$\text{Düğüm sayısı} = 4 , \quad \text{Elastiklik modülü} = 2 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 ,$$

$$\text{Yük sayısı} = 3$$

Eleman uçlarının koordinatları;

$$x(1)=0 \quad ,y(1)=0$$

$$x(2)=2,25 \quad ,y(2)=3,897$$

$$x(3)=6,25 \quad ,y(3)=3,897$$

$$x(4)=6,25 \quad ,y(4)=0,897$$

Hareketin engellendiği serbestlik dereceleri;

$$1,2,3,10,11,12$$

Dış yükler;

4 Nolu serbestlik derecesinde +x yönünde 5845,7 N'luk kuvvet,

5 Nolu serbestlik derecesinde -y yönünde 13375,6 N'luk kuvvet,

6 Nolu serbestlik derecesinde pozitif yönde 10062,5 Nm'lik moment.

Alanlar,

$$A(1)=0,108 \text{ m}^2 ;$$

$$A(2)=0,108 \text{ m}^2 ,$$

$$A(3)=0,090 \text{ m}^2 .$$

Alan atalet momentleri;

$$I_{zz}(1)=0,00110 \text{ m}^4 ,$$

$$I_{zz}(2)=0,00110 \text{ m}^4 ,$$

$$I_{zz}(3)=0,00061 \text{ m}^4$$

Maksimum gerilmenin olduğu yerin asal eksenlerden uzaklığının girilmesi;

$$H(1)=0,1748$$

$$H(2)=0,1748$$

$$H(3)=0,15775$$

Tablo 2 Örnek'e ait gerilme değerleri

**Gerilmeler ( N/m<sup>2</sup> )**

1 Nolu çubuğun 1.ucundaki gerilme = -1929008

1 Nolu çubuğun 2.ucundaki gerilme = -2244190

2 Nolu çubuğun 1.ucundaki gerilme = -612687,7

2 Nolu çubuğun 2.ucundaki gerilme = -1254508

3 Nolu çubuğun 1.ucundaki gerilme = -1989629

3 Nolu çubuğun 2.ucundaki gerilme = -2335270

Tablo 1 Örnek'e ait kuvvet ve moment değerleri

1.Çubukta global eksen takımındaki kuvvetler ve momentler	
F(1)	-350,686 N
F(2)	10598,17 N
M(3)	11614,49 Nm
F(4)	350,686 N
F(5)	-10598,17 N
M(6)	13597,9 Nm

1.Çubukta lokal eksen takımındaki kuvvetler ve momentler	
F(1)	-9002,868 N
F(2)	5602,901 N
M(3)	11614,49 Nm
F(4)	-9002,868 N
F(5)	-5602,901 N
M(6)	13597,9 Nm

2.çubukta global eksen takımındaki kuvvetler ve momentler	
F(1)	5495 N
F(2)	-2777,431 N
M(3)	-3535,404 Nm
F(4)	-5495 N
F(5)	2777,431 N
M(6)	-7574,322 Nm

. 2.çubukta lokal eksen takımındaki kuvvetler ve momentler	
F(1)	5495 N
F(2)	-2777,431 N
M(3)	-3535,404 Nm
F(4)	-5495 N
F(5)	2777,431 N
M(6)	-7574,322 Nm

3.Çubukta global eksen takımındaki kuvvetler ve momentler	
F(1)	5495 N
F(2)	-2777,431 N
M(3)	7574,32 Nm
F(4)	-5495,064 N
F(5)	2777,431 N
M(6)	8910,871 Nm

3.Çubukta lokal eksen takımındaki kuvvetler ve momentler	
F(1)	2777,431 N
F(2)	5495,064 N
M(3)	-7574,32 Nm
F(4)	-2777,431 N
F(5)	-5495,064 N
M(6)	8910,871 Nm

Kuvvet, gerilme değerleri değerleri elle hesaplanmış kaynakta verilen değerler ile aynı olduğu görülmüştür [11].

#### 4. Sonuç

Bu çalışmada eleman eşitliklerinin, dolayısı ile katılık matrislerinin düzlemsel çubuk elemanlarda nasıl oluşturulacağı gösterilmiş, bunlardan faydalanarak kuvvet-gerilme analizinin ne şekilde yapılacağına dair temel bilgiler araştırılmış ve algoritmalar oluşturulmuştur. Program yazılarak bilgisayara aktarılmıştır. Sınır şartları dikkate

alınarak lineer denklem sistemlerinin nasıl çözülebileceği araştırılmış ve bilgisayar programı yazılmıştır.

Bu çalışmada verilen örnekteki sistemlerin eleman sayıları azdır. Böyle sistemler seçilmiş olmasının sebebi kontrolün yapılabilmesi içindir. Çok miktarda eleman ihtiva eden sistemlerde de aynı program rahatlıkla kullanılabilir. Eleman sayısının artması problem çözümü için ilave bir güçlük getirmez.

İleriki çalışmalarda çerçeve elemanlarının birbiriyle sadece rijit değil de diğer bağ tipleri ile de bağlı olduğu düşünülerek katılık matrisleri türetilip, algoritmaları ona göre oluşturulacaktır.

### **Referanslar**

- [1] Karataş, H., İşler, Ö., 1983, Statik Problemleri, Çağlayan Kitapevi, Beyoğlu-İstanbul
- [2] Beer, P. , F. ,1985, Mühendisler İçin Mekanik,Static, Mcgraw-Hill Book, İstanbul
- [3] Shames, I. ,H. ,1980, Engineering Mechanics,Statics,Prentice-Hall, New Jersey
- [4] Nath, B. ,1974, Fundamentals Of Finite Elements For Engineers, The Athlone Press Of The University, London
- [5] Hahn, H. ,G. ,1982, Methode Der Finiten Elemente In Der Festigkeitslehre,2. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden
- [6] Segerlind, J., L. ,1976,Applied Finite Element Analysis, Michigan State University, New York
- [7] Keskinel, F. , Karadoğan, F. ,H. ,1983, Fortran 4 Algoritma Kurma Ve Program Geliştirme, Birsen Yayınevi, İstanbul
- [8] Weaver, W. , Jr. , 1972,Basic Programs For Applied Mechanics, Statics,Mcgraw-Hill,U. S. A.
- [9] Rao,S. ,S. ,1982, The Finite Element Method İn Engineering,Pergamon Press, Usa.
- [10] Laursen, I., H., Matrix Analysis Of Structures,Mcgraw-Hill Book,New York
- [11] Önal, G.,1993, Çerçevelerde Bilgisayar Yardımı İle Gerilme Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,