

SAYISAL ARAZİ MODELLERİNDE BAZI ENTERPOLASYON YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Taner Üstüntaş

Selçuk Üniversitesi, Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi, Jeodezi ve Fotogrametri
Mühendisliği Bölümü

Özet

Bu çalışmanın amacı, Sayısal Arazi Modelleri'nde (SAM) da kullanılan beş değişik enterpolasyon yöntemlerinin karşılaştırılmasıdır. Bu amaca yönelik olarak, çalışmanın ilk bölümünde, beş değişik yöntem, Ters Mesafe, Kriging, Delaunay Üçgenleme, Radyal Bazlı, Yerel Poligon Fonksiyonları, detaylı bir şekilde incelenmiştir. Sonra, örnek bir arazi üzerinde, her bir yöntem enterpolasyon yöntemi kullanılarak, arazi modeli incelenmiştir. Sonuç olarak, incelenen bu beş değişik yöntem, işlem doğruluğu ve zaman açısından değerlendirilmiştir. Doğruluk ve zaman açısından değerlendirme yapıldığında, Delaunay yönteminin, sadece doğruluk (hata) düşünüldüğünde ise, Kriging (Doğrusal) yönteminin uygun olduğu, görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Sayısal Arazi Modeli (SAM), Enterpolasyon

COMPARATION OF SOME INTERPOLATION METHODS IN DIGITAL TERRAIN MODELS

Abstract

The main aim of this study is to compare five different interpolation methods for prediction of Digital Terrain Models. To rich this aim, these five different interpolation methods, Inverse Distance, Kriging, Delaunay Triangulation, Radial Basis Function, and Local Polynomial, are explained in detail in the first section of this study. Then, the Digital Terrain Model is created and analyzed the methods on a sample digital terrain. Finally, the result of this analysis is evaluated in terms of CPU time and accuracy. Results show that Delaunay interpolation gives the best solution in terms of CPU time and accuracy, and Linear Kriging Interpolation gives the best solution in terms of accuracy.

Keywords: Digital Terrain Model (DTM), Interpolation Methods

1. Giriş

Sayısal Arazi Modelli (SAM) yeryüzünün bilgisayarla yapılacak işlemlere esas olmak üzere sayısal olarak temsil edilmesidir. Bu tanımla belirlenen SAM için yalnızca koordinatları ile bilinen noktalar değil, uygun bilgisayar programlarında gerekli olmalıdır. SAM, araziye oluşturan noktalar (x,y,z koordinatlar) ile arazinin sürekli yüzeyinin basitçe tasvir edilmesidir. Kısaca, arazi yüzeyinin sayısal tasvir edilmesidir. SAM'a alternatif olarak, Digital Elevation Model(DEM), Digital Height Model(DHM), Digital Ground Model(DGM), Digital Terrain Elevation Model(DTEM) terimlerinde kullanılmıştır[1].

SAM kavramı, 1950 yıllarında MIT' de fotogrametristlerin çalışmaları ile başlamıştır [2]. SAM metodlarındaki ilk esaslı gelişmeler, arazi enterpolasyon metotlarında oldu.

Bu alanda, enterpolasyon algoritması keşfetmeye çalışıldı. İlk çalışmaların kapsamlı değerlendirmesini Schut yapmıştır [3]. Çok fazla enterpolasyon metotları teklif edilmiş olmasına rağmen, pratikte kullanılan farklı teknikler arasında metot karşılaştırmasını Ackermann yapmıştır [4].

SAM doğruluğu hakkında kesin bir şey söylemek, onu etkileyen faktörler net bir şekilde bilinmedikçe, mümkün değildir. Doğruluğu etkileyen arazi yüzey özellikleri faktörler aşağıdaki gibi özetlenebilir [1].

- SAM kontrol noktalarının dağılımı ve yoğunluğu,
- SAM kontrol noktalarının elde edilmesi doğruluğu,
- Arazi yüzeyi modellemesi için kullanılan metotlar.

Şüphesiz, doğruluğu en çok etkileyen faktör araziye kontrol noktaları yardımıyla tasvir etmektir. SAM, kontrol noktaları üzerine kurulacağına göre, araziye tam tasvir edemeyen noktaların olumsuz etkilerini hiçbir enterpolasyon yöntemi gideremez. Tasvirin çok iyi olması durumunda, enterpolasyon yönteminin önemi azalır.

Bu çalışmada, arazinin doğru tasviri ile ilgilenmeyip, sadece enterpolasyon yöntemlerinin iç doğruluk kabiliyetleri ile ilgilenilmiştir.

2. Enterpolasyon Yöntemleri

2.1 Ters mesafe metodu (Inverse Distance)

İlk olarak Ters Mesafe enterpolasyon yöntemi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [5].

$$\hat{Z}_i = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{Z_i}{h_{ij}^\beta}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{h_{ij}^\beta}} \quad (1)$$

Bu eşitlikte, h , kare ağı noktası j ve oluşturulacak uzaklıktaki komşu noktası i arasındaki mesafedir. (1) eşitliğinde yer alan h değeri (2) eşitliğinden hesaplanmaktadır.

$$h_{ij} = \sqrt{d_{ij}^2 + \delta^2} \quad (2)$$

Bu eşitlikte, \hat{Z}_j enterpole edilecek j noktasının değeri, z_i komşu noktayı, d_{ij} kare ağı arasındaki uzaklığı, β kuvveti ve δ yumuşatma parametresini göstermektedir.

2.2 Kriging metodu

Bu metot, D.G. Krige isimli Güney Afrikalı bir maden mühendisi tarafından önerilmiştir [6]. Genel olarak kestirim işlemi (3) eşitliğinde gösterildiği gibi, bilinen değerlerin ağırlıklı ortalaması alınarak yapılır.

$$Z^*(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i z(x_i) \quad (3)$$

Bu eşitlikte, $z^*(x_0)$ kestirilecek nokta, $z(x_i)$ bilinen noktayı, λ_i atanacak ağırlıkları göstermektedir.

Ağırlıkların, kestirim hatalarının ortalaması sıfır ve varyansı en küçük olacak şekilde belirlenmesine Kriging adı verilir. Kriging matris formunda (4) eşitliğindeki gibi gösterilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdot & \gamma_{1n} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdot & \gamma_{2n} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdot & \gamma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \lambda_n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{01} \\ \gamma_{02} \\ \cdot \\ \gamma_{0n} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Bu matriste, γ_{ij} , x_i ve x_j noktaları arasındaki uzaklığa ilişkin variogram değerini, m Lagrange sabitini göstermektedir.

Kriging yöntemi ile yapılan hatanın varyansına, Kriging Varyansı denir ve bu varyans aşağıdaki (5) eşitliğinde gösterilmiştir.

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_0 - x_i) + m \quad (5)$$

Verilere göre önceden variogram fonksiyonu belirlenir. Bu fonksiyona göre, ağırlıklar hesaplanır. Kriging Varyansı, verilerin gerçek değerlerine bağlı değildir, veri sayısına ve veriler arasındaki uzaklığa bağlıdır.

2.3 Delaunay üçgenleme yöntemi

1934 yılında Rus matematikçi Boris Nikolaevich Delaunay tarafından geliştirilmiştir [7]. Bir noktanın en yakındaki noktalarını işleme alır. Bu noktaları alırken saat ibresi yönünde hareket eder. Amaç en yakında olan noktalardan üçgenler oluşturmaktır. Oluşan üçgen içinde başka bir nokta olamaz. Yani, üçgenler oluşturulduğunda, kenarları kesişen üçgenler oluşamaz. Saat ibresi yönünde A, B, C, D, noktaları olduğunu kabul edersek, D noktası $\triangle ABC$ üçgeni içerisinde kalmamalıdır. Bu amaçla (6) eşitliğindeki kontrol yapılmalıdır.

$$\text{daireiçinde}(a,b,c,d) = \det \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_x^2 + a_y^2 & 1 \\ b_x & b_y & b_x^2 + b_y^2 & 1 \\ c_x & c_y & c_x^2 + c_y^2 & 1 \\ d_x & d_y & d_x^2 + d_y^2 & 1 \end{pmatrix} > 0 \quad (6)$$

Determinantın sıfır olması, bu dört noktanın aynı düzlemde olması demektir. En az üç noktayla bir düzlem oluşturulur. Dördüncü noktanın bu üçgenin dışında olması için determinantın sıfırdan büyük olması gerekir.

Üçgenler oluşturulurken aşağıdaki özelliklerin sağlanması gerekmektedir.

- Üçgenler geniş açılı üçgenlerden, mümkünse eşkenar açılı üçgenlerden oluşturulmalı,
- Oluşan üçgenlerden geçen daire çapı minimum olanını seçmeli,
- Üçgenler öyle seçmeliyiz ki, tüm dairelerin toplamı minimum olan üçgenlerden oluşmalıdır.

Bu algoritmayı ifade eden aşağıdaki gibi yalancı kod yazılabilir.

for her $i < n$

hesapla $z = x^2 + y^2$

```
for her i < n -2
  for her j < n
    for her k < n
      üçgenlerin normallerini hesapla
      sadece üçgenin taban yüzeyini kontrol et
      if(j != k && zn < 0)
        {
          for her m < n
            {
              if m verilen (i,j,k) noktası üzerindeyse
                then bir Delaunay üçgeni oluştur
              else noktayı at
            }
          }
        }
      }
    }
  }
}
```

2.4 Radyal bazlı fonksiyon (Radial Basis Function)

Radyal bazlı bir fonksiyon genel olarak (7) eşitliğindeki gibi gösterilir [8].

$$s(y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi(\|y - x_i\|) \quad (7)$$

λ_i katsayıları, x_i merkez noktasını, φ temel fonksiyonu ifade etmektedir. Temel fonksiyon (8) eşitliğinde gösterilen eşitliklerden bir seçilebilir.

Gaussian

$$\varphi(r) = e^{-cr^2} \quad (8)$$

Oklid uzunluğu

$$\varphi(r) = r$$

Hardy Multikvadrik

$$\varphi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$$

Ters Multikvadrik

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$$

Thin-Plate Spline

$$\varphi(r) = r^2 \log r$$

Radyal esaslı fonksiyon, tek değişkenli spline fonksiyonu olarak düşünülebilir. X değerinin artan şekilde sıralandığı düşünülürse, fonksiyon, lineer spline (9) eşitliğindeki gibi olur.

$$s(y) = \frac{(x_{i+1} - y)f_i + (y - x_i)f_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}, \quad x_i \leq y \leq x_{i+1}, \quad (9)$$

2.5 Yerel polinom fonksiyonu (Local Polynomial)

Yerel polinom metodu, ağırlıklı en küçük kareler yöntemi ile eğri uydurmadır. 1., 2. ve 3. dereceden polinom olarak ifade edilirler [9]. Eğer fonksiyonu 1. dereceden ifade edilirse,

$$F(X, Y) = a + bX + cY \quad (10)$$

İkinci dereceden ifade edilirse,

$$F(X, Y) = a + bX + cY + dXY + eX^2 + fY^2 \quad (11)$$

Üçüncü dereceden ifade edilirse,

$$F(X, Y) = a + bX + cY + dXY + eX^2 + fY^2 + gX^2Y + hXY^2 + iX^3 + jY^3 \quad (12)$$

Ağırlıklı en küçük kareler metodunda, ağırlıklar, oluşturulacak kare uzunluğuna bağlı olarak (13) eşitliğindeki gibi tanımlanır.

$$T_{XX} = \frac{\cos(\phi)}{R_1} \quad T_{XY} = \frac{\sin(\phi)}{R_1} \quad T_{YX} = \frac{-\sin(\phi)}{R_2} \quad T_{YY} = \frac{\cos(\phi)}{R_2} \quad (13)$$

Bu eşitlikte, ϕ arama elipsi açısıdır, -360 ila 360 arasında değer alabilir. R_1, R_2 ise arama yarı çapıdır ve pozitif bir değer olması gerekir.

A_{XX}, A_{XY}, A_{YY} arama elipsinin bir parametresidir. Tüm veriler için aynı alınır ve (14) eşitliğindeki gibi ifade edilir.

$$A_{XX} = T_{XX}^2 + T_{YX}^2$$
$$A_{XY} = 2(T_{XX}T_{XY} + T_{YX}T_{YY}) \quad (14)$$

$$A_{YY} = T_{YY}^2 + T_{XY}^2$$

Ağırlık, (15) eşitliğindeki gibi hesaplanır.

$$dX = X_i - X_0$$

$$dY = Y_i - Y_0$$

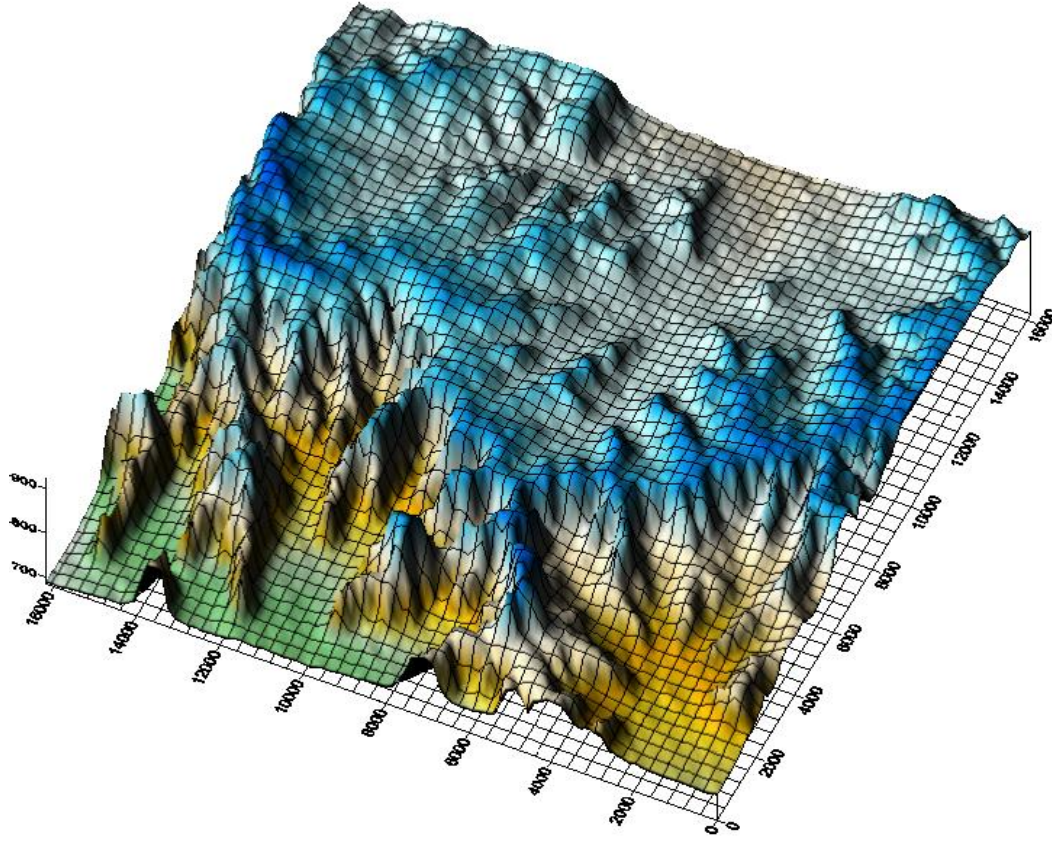
$$R_i = \sqrt{A_{XX}dX^2 + A_{XY}dXdY + A_{YY}dY^2} \quad (15)$$

$$W_i = (1 - R_i)^p$$

Yerel en küçük kareler parametreleri, hataların karelerinin ağırlıklı toplamını küçültmek (16) eşitliğindeki gibi hesaplanır.

$$\text{Minimize} \sum_{i=1}^N W_i [F(x_i, y_i) - z_i]^2 \quad (16)$$

3. Uygulama



Şekil 1. 541x541 kare ağından oluşan test alanı.

Test alanı, 541x541 kare ağı ve 292681 düğüm noktasından oluşmaktadır (Şekil 1). Kare ağı 30 m. dir. Kare ağı seyreltilerek 60 m. lik arazi yapısı oluşturulmuştur. Bu arazi yapılarından, 30 m. lik kare ağı, enterpolasyon yöntemleriyle tekrar oluşturulmuştur. İç doğruluğu ölçme yöntemi olarak, enterpolasyonla bulunan yükseklik ile gerçek arazi değer arasında farklardan karesel ortalama hatalar bulunmuştur (Tablo 1). Yani 60 m lik kare ağını farklı enterpolasyon yöntemleri kullanarak 30 m lik kare ağı oluşturulmuştur. Hata miktarını hesaplamak için hesapla bulunan ve gerçek arazi değerleri karşılaştırılmıştır. Kullanılan enterpolasyon yöntemleri, Ters Mesafe, Kriging, Delaunay Üçgenleme, Radyal Bazlı, Yerel Poligon, fonksiyonlarıdır. Hesapla bulunan yüzey ile ilk yüzey karşılaştırılarak karşılıklı noktalar arasındaki yükseklik farkları bulunmuştur.

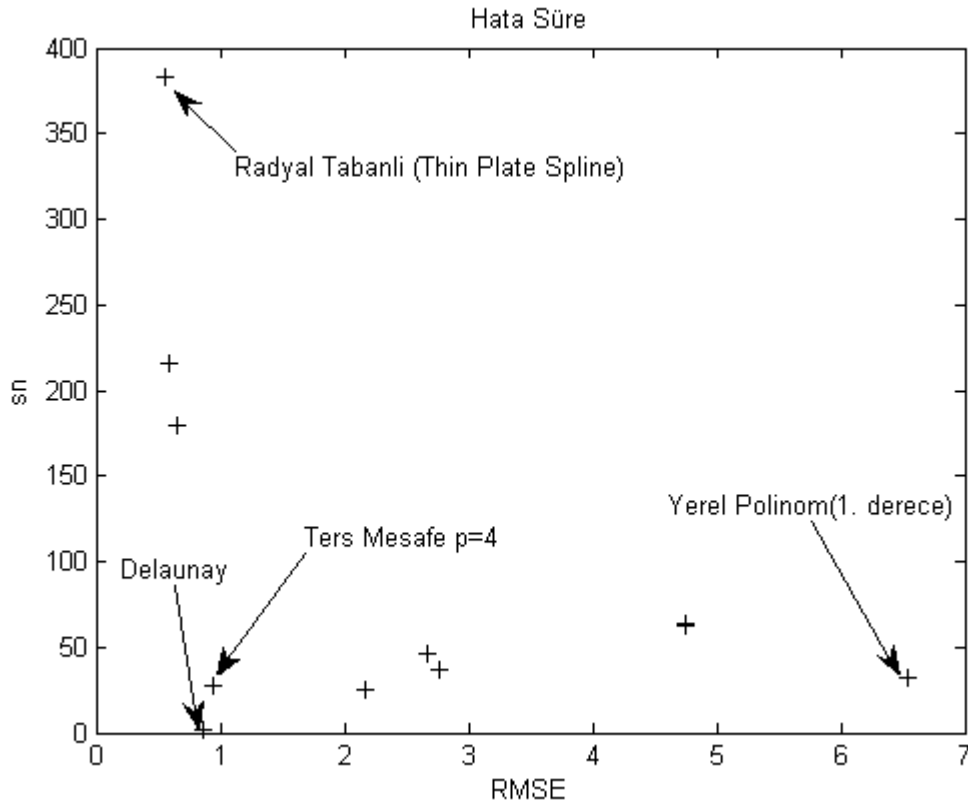
4. Sonuçlar

Enterpolasyon yöntemlerinin karşılaştırması Tablo 1 de verilmiştir. Beş ayrı yöntemin değişik parametreleri ile işlem yapılarak, toplam onbir ayrı işlem elde edilmiştir. Farklı on bir değerinin yorumlanması Şekil 2’de gösterilmiştir. Şekil 2’de, Y eksenini olarak toplam işlem süresi sn olarak, X eksenini ise hata olarak alınmıştır. Bu grafikte en ideal durum eksenlerin başlangıç noktasına yakın olmasıdır. Çünkü, amaç en kısa sürede ve en az hatayla işlem yapılması istenilmektedir. On bir işlem içinde bu şartı sağlayan iki yöntem öne çıkmaktadır. Bunlar, Delaunay ve Ters Mesafe (4. derece)

fonksiyonlardır. Eksenlerin başlangıç noktasından uzakta olan yöntemlerin maliyeti, ya doğruluk açısından, ya da işlem süre açısından, artmaktadır.

Tablo 1. Enterpolasyon yöntemlerinin işlem hatası ve süresi.

Enterpolasyon Yöntemi (RMSE)	Hata	Süre (sn)
1 Ters Mesafe p=2	2.17	24.7
2 Ters Mesafe p=4	0.94	27.2
3 Kriging (Doğrusal)	0.65	179.6
4 Kriging (Gaussian)	4.75	63.8
5 Kriging (Karesel)	4.75	62.9
6 Delaunay	0.86	1.72
7 Radyal Bazlı (Multikuadrik)	0.59	215.3
8 Radyal Bazlı (Thin Plate Spline)	0.56	382.8
9 Yerel Polinom (1. derece)	6.54	32.6
10 Yerel Polinom (2. derece)	2.76	37.1
11 Yerel Polinom (3. derece)	2.67	46.5



Şekil 2 Hata- süre grafiği

Hata maliyeti en yüksek olan birinciden Yerel Polinom, süre olarak maliyeti en fazla olan ise Radyal Esaslı (Thin Plate Spline) olmaktadır.

Kaynak [1] de yapılan incelemede, yerli yazılımların, enterpolasyon yöntemleri olarak Delaunay yöntemini kullandıkları görülmüştür. Bu kaynakta, Selçuk Üniversitesi

kampusünde alınan 1486 noktalı alanda, 2970 üçgen oluşturularak, düzeç eğrileri geçirilmiştir. Farklı yazılımların ürettiği düzeç eğrileri karşılaştırıldığında, farkların çok az olduğu görülmüştür. Bunun sebebi, eğrileri yumuşatma fonksiyonlarındaki farklardan kaynaklanmaktadır.

Yöntemlerin içinde en az hata doğrusal Kriging Yöntemi ile elde edilmiştir. Bu yöntemde işlem maliyeti fazladır. Doğruluk daha önemli, işlem maliyeti önemli değil ise, bu durumda doğrusal Kriging yöntemi seçilebilir.

5. Kaynaklar

- [1] Üstüntaş, T., Sayısal Arazi Modellerinde Hassasiyet Analizi ve Enterpolasyon Yöntemleri, Yüksek Lisans Tezi, SÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya 1994.
- [2] Miller, C.L., Laflamme, R.A., "The digital terrain model-theory and application". Photogrammetric Engineering, 24(3): 433-442, 1958.
- [3] Schut G.H., "Review of Interpolation Methods for Digital Terrain Models", The Canadian Surveyor, Vol.30.No.5, 1976.
- [4] Ackermann, F., "The Accuracy of Digital Height Models", Proc., 37th Photogrammetric Week, University of Stuttgart, 113-143, 1979.
- [5] Davis, John C., Statistics and Data Analysis in Geology, John Wiley and Sons, New York; 1986.
- [6] Krige D.G., A statistical approach to some nine valuations and allied problems at the witwatersrand. Master's thesis, University of Witwatersrand, 1951.
- [7] Delaunay Boris N., Sur la Sphère Vide. Izvestia Akademia Nauk SSSR, VII Seria, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk 7:793-800, 1934.
- [8] Hardy, R. L. Theory and Applications of the Multiquadric-BiHarmonic Method, Computers Math. Applic, v. 19, n. 8/9, p. 163-208, 1990.
- [9] Jianqing F., Local Polynomial Modelling and Its Applications. Chapman & Hall/CRC; 1996.