GEOMETRİDE UZAY, DÜŞEY VE YATAY AÇILAR ARASINDAKİ FONKSİYONEL İLİŞKİ

Veli Akarsu
Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Zonguldak Meslek Yüksekokulu, Teknik Programlar Bölümü, 67100 Zonguldak, vakarsu@mynet.com

Özet

Uzay açı, yatay ve düşey açıların bileşkesi olan açıdır. Bilindiği gibi obje geometrisini belirlemede uzunluk ölçeklendirme, açı ise şekil bakımında önemlidir. Uzay, düşey ve yatay açılar fen bilimlerin bütün dallarında kullanılmaktadır. Bu çalışmada, Öklid ve Küre geometrilerinde sözü edilen açılar arasındaki fonksiyonel ilişki analitik ve sayısal olarak incelenmiştir.
Anahtar Kelimeler: Öklid ve Küre Geometrileri, Uzay Açı, Düşey Açı, Yatay Açı

FUNCTIONAL RELATIONSHIP BETWEEN SPATIAL, VERTICAL AND HORIZONTAL ANGLES IN GEOMETRY

Abstract

Spatial angle is the combination of horizontal and vertical angles. In object geometry it is a well-known fact that distance is crucial for scaling and angle for shaping. Spatial, vertical and horizontal angles have been used in all branches of natural sciences. In this study, the functional relationship between the angles described above has been investigated analytically and numerically in Euclidean and Spherical geometry.
Keywords: Euclidean and Spherical Geometry, Spatial Angle, Vertical Angle, Horizontal Angle

1. Giriş

Açı kavramı, Öklid Geometrisinde düzlemde başlangıç noktaları ortak iki doğrultu arsındaki yön farkı şeklinde tanımlanmıştır. Açının değişimi, açının kollarını oluşturan doğrultuların değişimine bağlıdır. Metre, ışığın boşlukta 1/299 792 458 saniyelik zaman süresince aldığı yolun uzunluğudur [1]. Açı değişiminin ölçülmesi için uzunluk ölçüm referans standardı gibi bir referans standart yoktur. Bu nedenle yatay açıyı direkt olarak ölçen bir alet günümüze kadar geliştirilememiştir. Radyan, steradyan açı birimleri, SI birimler sisteminde ek temel birim olarak yer almıştır. Açı birimleri altmışlık sistem olan derece ile yüzlük sistem olan grad (gon) dır. Bu açı birimleri dairenin 360 ya da 400 eşit parçaya bölünmesi ve trigonometrik ilkelere dayalı yöntemlerle gerçekleştirilir [2-7]. Açı referans ve çalışma standartlarını kalibre etme kabiliyeti, referans dairenin amaçlanan hassas ve doğru bölünmesine bağlıdır [5]. Uzay açı jeodezide pek kullanılmamasına karşın, eğik (uzay) kenarların ölçüldüğü trilaterasyon ağlarında, kosinüs teoremi ile hesaplanan iç açılar uzay açılar olup, ağ kontrolü amacıyla kullanılır [8]. Genelde tek bir açı varmış gibi algılanır. Oysaki çalışılan düzleme göre **uzay, düşey ve yatay açılar** söz konusudur. Günümüzde uzay açı sekstant, düşey açı klasik ya da elektronik teodolit ile ölçülür ve yatay açı ise klasik ya da elektronik teodolit ile yapılan doğrultu ölçüleri farkından hesaplanır [10, 11, 12]. Düşey (zenit) açı direkt ölçülür, yatay açı ise hesaplanır. Yatay ve düşey açıların bileşkesi uzay açıyı verir. Uzay açı üçgen köşesinden diğer üçgen köşelerine yapılan yatay doğrultu ve düşey açı ölçülerine bağlı olarak hesaplanabildiği gibi, üçgenin uzay kenarlarına ait ölçü değerlerinden de hesaplanabilir. Bu çalışmada yukarıda anılan açılar, Öklid ve Riemann Geometrilerinde tanımlandıktan sonra her bir geometride bu açılar arasındaki fonksiyonel ilişki gösterilmiştir.

Söz konusu açılar objenin iki ve/veya üç boyutlu geometrisi belirlenirken önemlidirler. Bu açılar tüm uygulamalı bilimlerde ve temel bilimlerde kullanılmaktadır. Obje geometrisinin ölçeklendirilmesi ise uzunluk referans standardı metre ile gerçekleştirilmektedir. Bir objeye ait geometri ancak ve ancak uzunluk ve açı büyüklüklerinin ölçülmesiyle belirlenebilir. Eratosthenes, yerküremizin geometrisini o günün olanaklarına göre düşey açı ve uzunluk ölçüleri yardımıyla belirleyebildi. Bu geometrinin önemi ise doğa bilimlerinde yeni bir çığır açan, Newton'un Kütle Çekim Kanununun ispatlanmasında yaptığı katkıdır. Riemann geometrisi ise Albert Einstein'nin Rölativite teorisini geliştirmesine yol açmıştır. Bu çalışmada yeterince incelenmeyen açı çeşitleri ve aralarındaki fonksiyonel ilişki Öklid ve Küre geometrilerinde incelenmiştir. Literatürde sadece açı çeşitlerinden bahsedilip tanımları yapılmış olup, açılar arasındaki ilişki incelenmemiştir [13, 14, 15, 18]. Ayrıca, bu açılar arasındaki fonksiyonel ilişki hem analitik hem de sayısal uygulama ile gösterilmesi amaçlanmıştır. Sayısal uygulamalar ile açıların ne anlama geldiği de ayrıca yorumlanmıştır. Uzay açı ile yatay açı arasındaki farkın, grad saniyesinden (**cc**) grad dakikasına (**c**) kadar değiştiği, uygulama kısmında deneysel verilere dayanarak ispatlanmıştır.

2. Öklid Geometrisinde Uzay, Düşey Ve Yatay Açılar Arasındaki Fonksiyonel İlişki

Öklid geometrisinde uzay açı, düşey açı, yatay açı ve eğim açısı tanımları Şekil 1'e göre aşağıdaki alt bölümlerde verilmiştir.

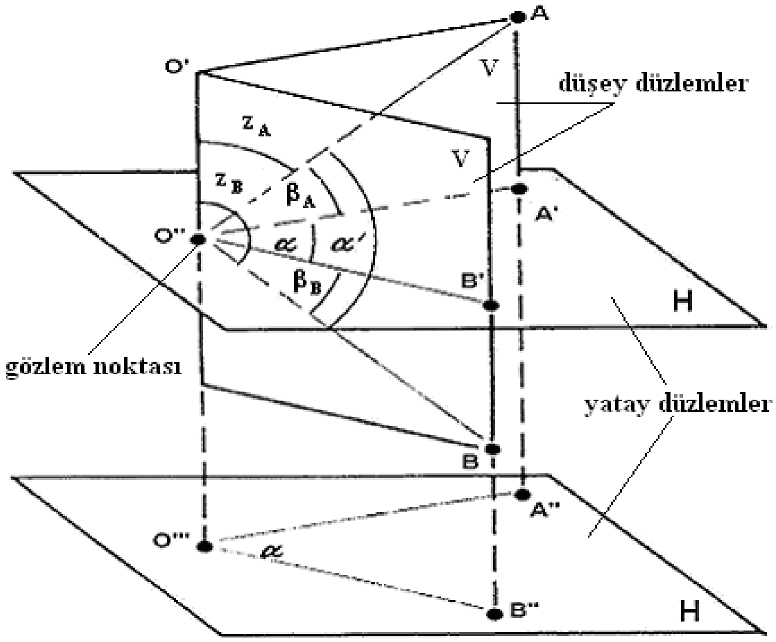
2. 1. Uzay Açı

O'' noktasındaki uzay açısı, $|O''A|$ ve $|O''B|$ uzay doğrultuları arasındaki $\angle AO''B$ açısıdır. Uzay açının ölçüsü (açı ölçüsü içinde aynı gösterim kullanılarak), $\angle AO''B = \alpha'$ olarak gösterilebilir.

2.2. Düşey Açı

O'' noktasından geçen V düşey düzlemlerinin ortak kesim doğrultusu $|O'O'''|$ düşey doğrultusu (yerçekimi doğrultusu)'ndan başlayarak, $|O''A|$ ve $|O''B|$ eğik doğrultuları arasındaki $\angle O'O''A$ ve $\angle O'O''B$ açılarının her biri birer düşey açıdır.

Bu düşey doğrultu ile hedef (gözlem) doğrultusu arasında oluşan (düşey) açıya, **zenit açısı** veya **başucu** açısı denir [16]. Düşey açıların ölçüleri ise $\angle O'O''A = z_A$ ve $\angle O'O''B = z_B$ şeklinde gösterilebilir. Gözlem yerinden (O'' noktası) geçen yatay düzlemden başlayarak, bu düzlemin pozitif (düzlemin üstü) yönünden hareketle gözlem doğrultusuna kadar olan düşey açıya ya da gözlem ışını ile yatay düzlem arasında kalan pozitif açıya yükseklik açısı denir [17].



Şekil 1. Öklid Geometrisinde uzay açı **(α'),** düşey açılar (z_A, z_B), yatay açı (α) ve eğim açılar (β_A, β_B)

2.3 . Yatay Açı

$|O''A|$ ve $|O''B|$ eğik doğrultuların O''ya da O''' noktalarından geçen yatay H düzlemler üzerindeki izdüşümleri olan $|O''A'|$ ve $|O''B'|$ veya $|O'''A''|$ ve $|O'''B''|$ doğrultuları arasındaki $\angle A'O''B' = \angle A''O'''B''$ açısıdır. Yatay açı ölçüsü $\angle A'O''B' = \angle A''O'''B'' = \alpha$ olarak gösterilebilir. Yatay açı direkt ölçülemez, ancak doğrultu ölçüleri farkıyla hesaplanabilir. A ve B noktalarının O'' noktasında geçen H yatay düzleminin üstünde, altında veya noktalardan birisinin düzlemin üstünde diğerinin altında olması ya da noktalar arası yükseklik farkı, yatay açı ölçüsünü etkilemez.

2.4. Eğim Açısı

$|O''A|$ ve $|O''B|$ eğik doğrultularının O'' noktasında geçen H yatay düzlem üzerine dik iz düşürülmesiyle oluşan, $|O''A'|$ ve $|O''B'|$ yatay doğrultular ile yaptığı $\angle A'O''A$ ve $\angle B'O''B$ açılarıdır. Şekil 1'e göre, bu açılardan $|O''A'|$ yatay doğrultusundan başlayarak (gözlem yerinden geçen düzlemin üstü pozitif yön) $|O''A|$ eğik doğrultusuna kadar olan $\angle A'O''A = \beta_A$ açısı yükseklik açısı, $|O''B'|$ yatay doğrultusundan başlayarak (gözlem yerinden geçen düzlemin altı negatif yön) $|O''B|$ eğik doğrultusuna kadar olan $\angle B'O''B = \beta_B$ açısı ise eğim açısı olarak tanımlanır. Çoğu kez yükseklik açısı ve eğim açısı aynı adla, yani sadece yükseklik açısı veya eğim(meyil) açısı diye anıldığından, bu haldeyken yataydan aşağıda oluşan düşey açıların işareti (-) alınmak suretiyle açının yükseklik açısı değil, eğim açısı olduğu belirtilmektedir [16]. Yükseklik açısı, eğim açısı ve zenit ya da başucu açılarının hepside düşey düzlemde bulunan açılardır. Yükseklik açısının işareti (+) eğim açısının işareti ise (-) olarak alınır. Eğim açısı bu çalışmada kullanılmayacaktır. Eğim açısı bazı mühendislik dallarına ilişkin projelerin uygulanmasında oldukça önemli olduğundan sadece tanımı verilmiştir.

Şekil 1'de görüldüğü gibi $O^{''}$ noktası açıların ortak kesişme noktası olmak üzere, A ve B noktaları ile oluşturulan üç farklı açıdan, $\alpha^{'}$: uzay açı, z_A, z_B: düşey açılar ve α: yatay açı ölçüleridir. Düzlem trigonometrinin temel teoremlerinden biri olan kosinüs kenar teoremi $\Delta AO^{''}B$ ve $\Delta A^{''}O^{'''}B^{''}$ üçgenlerine uygulanarak,

$$|AB|^2 = |O^{''}A|^2 + |O^{''}B|^2 - 2|O^{''}A|\,|O^{''}B|\cos\alpha^{'}$$
$$|A^{''}B^{''}|^2 = |O^{'''}A^{''}|^2 + |O^{'''}B^{''}|^2 - 2|O^{'''}A^{''}|\,|O^{'''}B^{''}|\cos\alpha \qquad (1)$$

eşitlikleri elde edilebilir.

$|O^{'}O^{''}| // |AA^{'}|$ ve $|O^{''}A^{'}| \perp |A^{'}A|$ olduğundan, $\angle O^{''}AA^{'} = z_A$ ve $\Delta O^{''}A^{'}A$ üçgeni dik üçgendir.

$$\Delta O^{''}A^{'}A \text{ dik üçgeninden, } \sin z_A = \frac{|O^{''}A^{'}|}{|O^{''}A|},\ \cos z_A = \frac{|AA^{'}|}{|O^{''}A|} \qquad (2)$$

eşitlikleri yazılabilir.

$|O^{''}O^{'''}| // |B^{'}B|$ ve $|O^{''}B^{'}| \perp |B^{'}B|$'den dolayı, $\angle O^{''}BB^{'} = 180^{\circ} - z_B$ ve $\Delta O^{''}B^{'}B$ üçgeni dik üçgendir.

$\Delta O^{''}B^{'}B$ dik üçgeninde $\angle O^{''}BB^{'}$ açısına sırasıyla sinüs ve kosinüs trigonometrik fonksiyonların tanımları uygulanarak,

$$\sin z_B = \frac{|O^{''}B^{'}|}{|O^{''}B|},\ -\cos z_B = \frac{|BB^{'}|}{|O^{''}B|} \qquad (3)$$

eşitlikleri yazılabilir. Şekil 1'deki B noktasının $|AA^{''}|$ doğrultusu üzerindeki izdüşüm noktası olan $A^{'''}$ ile oluşan $\Delta AA^{'''}B$ dik üçgenine Pisagor teoremi uygulanarak,

$$|AA^{'}|^2 + |BB^{'}|^2 + 2|AA^{'}|\,|BB^{'}| + |A^{'}B^{'}|^2 = |AB|^2 \qquad (4)$$

eşitliği yazılabilir.

(1), (2) ve (3) eşitlikleri (4) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\cos(\alpha^{'}) = \cos(z_A)\cos(z_B) + \sin(z_A)\sin(z_B)\cos(\alpha) \qquad (5)$$

eşitliği elde edilir.

Eğer A ve B noktaları $O^{''}$'den geçen H yatay düzleminin üstünde veya altında bulunmaları durumunda yine B noktasının $|AA^{''}|$ doğrultusu üzerindeki izdüşüm noktası $A^{'''}$ olmak üzere oluşan $\Delta AA^{'''}B$ dik üçgenine Pisagor teoremi uygulanarak

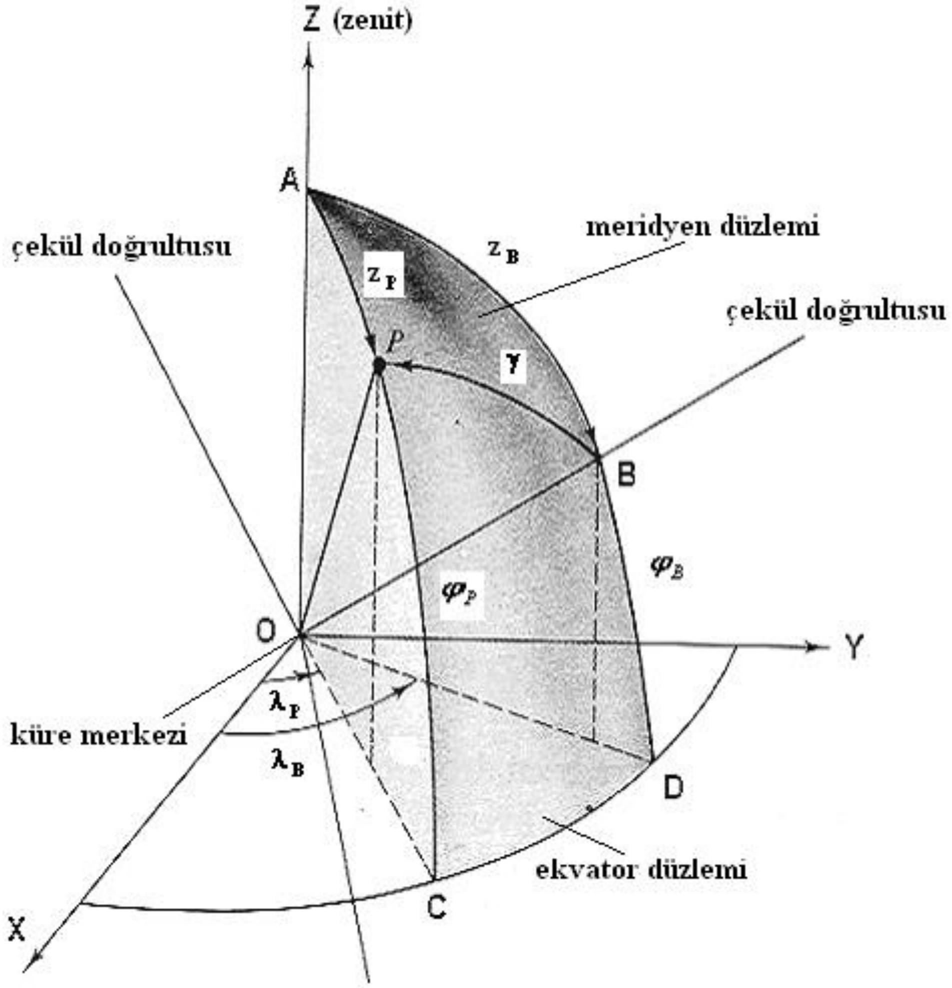
$$|AA^{'}|^2 + |BB^{'}|^2 - 2|AA^{'}|\,|BB^{'}| + |A^{'}B^{'}|^2 = |AB|^2 \qquad (6)$$

eşitliği elde edilir.

(1), (2) ve (3) eşitlikleri (6) eşitliğinde yerine yazılırsa yine (5) ifadesi elde edilir. (5) eşitliği yeryuvarı üzerindeki bir $O^{''}$ noktasının yeryuvarında farklı iki A ve B noktalarıyla oluşturdukları uzay açının, noktanın açı köşesinden diğer noktalara olan düşey açılar ile aynı noktadaki yatay açı fonksiyonu olduğunu göstermektedir.

3. Küresel Geometride Uzay, Düşey Ve Yatay Açılar Arasında Fonksiyonel İlişki

Küre geometrisinde uzay açı, düşey açı, ve yatay açı tanımları Şekil 2'ye göre aşağıdaki alt bölümlerde verilmiştir.



Şekil 2. Küre Geometrisinde, uzay açı (γ) , düşey açılar (z_P , z_B) ve yatay açı $(\angle COD = \Delta\lambda)$

3.1. Uzay Açı

Küre yüzeyinde P ve B gibi iki noktadan geçen büyük daire yay uzunluğunun γ açısal karşılığına uzay açı denir. Bu açı, büyük daire yayı uç noktaları P ve B noktalarından geçen çekül doğrultularının küre merkezinde (O'da) oluşturdukları $\angle POB$ açısıdır. Birim uzay açıya bir steradyan denir. Uzay açı aynı zamanda birim küre üzerindeki bir alanın sınırlarını küre merkezinde tarayan koni yüzeyinin alanıdır [9].

3.2. Düşey Açı

Düşey (zenit) eksenden başlayarak saat göstergesi hareketi yönünde hareketle küre yüzeyindeki P ve B noktalarından geçen çekül doğrultularının küre merkezinde (O'da) oluşturdukları z_P, z_B açıları birere düşey açıdır. Yer küresi yüzündeki noktalarda geçen çekül doğrultuları küre merkezinden geçer.

3.3. Yatay Açı

Küre yüzeyindeki P ve B gibi iki noktadan geçen meridyen dairelerinin, özel bir paralel daire olan ekvator düzleminde kestiği C ve D noktalarını, küre O merkezine birleştiren küre yarı çap doğrultuları arasındaki $\angle COD$ açısıdır. Bu açı aynı zamanda meridyen dairelerinin kesiştiği kutup noktalarındaki (A noktasındaki) $\angle PAB$ ölçek açıya da eşittir [7, 10, 11]. Şekil 2'deki ΔPAB küresel üçgeninin (7)'deki,

$$\angle COD = \angle PAB = \Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_P,\ \angle AOP = z_P,\ \angle AOB = z_B,\ \angle POB = \gamma \qquad (7)$$

elemanlarına küresel trigonometrinin temel teoremi, kosinüs-kenar teoremi uygulanarak

$$\cos(\gamma) = \cos(z_P)\cos(z_B) + \sin(z_P)\sin(z_B)\cos(\Delta\lambda) \qquad (8)$$

eşitliği elde edilir.

Eğer P ve B noktalarının $P(\varphi_P, \lambda_P)$ ve $B(\varphi_B, \lambda_B)$ coğrafi koordinatları olan enlem ve boylam değerleriyle, düşey açılar ve yatay açı değerleri ise

$$z_P = 90^\circ - \varphi_P\ ,\ z_B = 90^\circ - \varphi_B,\ \Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_P \qquad (9)$$

şeklinde ifade edilir ve (9) eşitlikleri (8) eşitliğinde yerine yazılırsa, (8) eşitliği

$$\cos(\gamma) = \sin(\varphi_P)\sin(\varphi_B) + \cos(\varphi_P)\cos(\varphi_B)\cos(\Delta\lambda) \qquad (10)$$

(10) eşitliğine dönüşür.

(10) eşitliği yerküresi üzerinde coğrafi koordinatları bilinen P ve B gibi iki nokta arasındaki en kısa uzunluğu uzay açı (γ) cinsinde veren bir eşitlik olup, (γ) uzay açısının uzunluğa dönüşümü,

$$|PB| = R\bar{\gamma},\ \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\rho},\ \rho = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{200\ g}{\pi},\ R=6370\ km \qquad (11)$$

eşitliği ile gerçekleştirilir.

4. Sayısal Uygulama

ZKÜ, kampusu içinde oluşturulan Şekil 1'deki, $\Delta O''AB$ üçgeninin her bir köşesinde Zeiss Elta Th 4 elektronik teodolit ile yapılan düşey açı ve yatay doğrultu ölçüleri aşağıdaki Tablo 1'de ve Topcon GTS 212 Total Station ile $\Delta O''AB$ üçgeninin ölçülen eğik ve yatay kenar uzunlukları ise Tablo 3'de verilmiştir.

(10) ve (11) no'lu formüllerin uygulaması olarak, Zonguldak ve Elazığ illeri arasındaki en kısa mesafe Tablo 5'deki coğrafi koordinatları yardımıyla hesaplanmıştır.

Tablo 1. $\Delta O''AB$ üçgeninin köşe noktalarına ait düşey açı ve yatay doğrultu ölçüleri

Durulan Nokta	Bakılan Nokta	Düşey Açılar z_{ij} (g)	Yatay Doğ r_{ij} (g)
O''	A	104.17845	0.00000
	B	104.77795	28.05845
A	B	101.44225	2.24788
	O''	95.84115	89.41812
B	O''	98.57910	248.11623
	A	95.27505	163.34185

Tablo 2. $\Delta O''AB$ üçgeninin Tablo 1'deki düşey ve yatay açılardan hesaplanmış uzay ve yatay açılar

Üçgen Köşesi	Uzay Açılar(g)	Yatay A.(g)
O''	27.9942	28.0584
A	87.2974	87.1702
B	84.7125	84.7744
İç Açılar T.	200.0041	200.0030

Tablo 3. $\Delta O''AB$ üçgeninin ölçülen eğik ve yatay kenar uzunlukları

Durulan Nokta	Bakılan Nokta	Eğik Kenar(m)	Yatay Kenar(m)
O''	A	321.932	321.153
A	B	141.111	141.098
B	O''	324.847	323.946

Tablo 4. Tablo 3'e göre hesaplanmış yatay ve uzay açılar

Üçgen Köşesi	Uzay Açılar(g)	Yatay A. (g)
O''	27.9984	28.0703
A	87.2843	87.1946
B	84.7173	84.7351
İç Açılar T.	200.0000	200.0000

Tablo 5. Zonguldak ve Elazığ illeri arası en kısa mesafenin uzay açıyla hesabı

Yer	Enlem(φ)	Boylam(λ)	Mesafe(km)

Zonguldak	$41^\circ 27'$	$31^\circ 48'$	703(küresel)
Elazığ	$38^\circ 41'$	$39^\circ 14'$	

5. Sonuç

Öklid ve Küre geometrilerinde uzay, düşey ve yatay açılar arsındaki fonksiyonel ilişki trigonometrik fonksiyonların fonksiyonu şeklinde (5) ve (10) numaralı bağıntılarda gösterilmiştir. Ayrıca, (5) ve (10) numaralı bağıntıların sayısal uygulamaları Tablo 2, Tablo 4 ve Tablo 5'de gösterilmiştir. Tablo 2 ve Tablo 4'de uzay açı ile yatay açının birbirinden farklı olduğu görülmektedir. Bu farklılığın nedeni, uzay açıların düzleme iz düşürülmesi sonucu bir miktar deformasyona uğrayarak yatay açı haline dönüşmesidir.

Uzay açıların Tablo 1'deki ölçüler kullanılarak Tablo 2'de hesaplanmış değerleri ile yine Tablo 1'e göre yatay açıların Tablo 2'de hesaplanmış değerleri arasındaki farklar, Şekil 1'e göre $\Delta O''AB$ üçgeninin O'' köşesinde 642^{cc} , A köşesinde -1272^{cc} ve B köşesinde 619^{cc} değerleri bulunmuştur. Eğik uzunlukların düzlem üzerindeki izdüşümü ile bir miktar deformasyona uğramaları, açı deformasyonuna da neden olduğu söylenebilir. $\Delta O''AB$ üçgeninin Tablo 1'de ölçülen düşey açılar ve yatay doğrultu değerleri kullanılarak (5) eşitliğine göre hesaplanan uzay açılarının Tablo 2'deki sayısal değerleri ile, aynı üçgenin ölçülen eğik uzunluklarının Tablo 3'deki değerleri kullanılarak kosinüs teoremine göre hesaplanan Tablo 4'deki uzay açı değerleri arasındaki fark, O'' köşesinde 42^{cc}, A köşesinde -131^{cc} ve B köşesinde ise 48^{cc} değerleri bulunmuştur. Oysaki $\Delta O''AB$'nin yatay doğrultu değerleri ile yatay uzunlukları yardımıyla hesaplanan yatay açıları arasındaki fark Tablo 2 ve Tablo 4'de görüldüğü gibi (c) boyutundadır. Yine, Tablo 2 ve Tablo 4'de uzay ve yatay açılar arasındaki fark (cc) boyutundan (c) boyutuna kadar değiştiği gözlenmiştir. Bu da uzay ve yatay açıların birbirinden farklı olduğunu gösterir. Tablo 5'de uzay açının yerküresi üzerinde iki nokta arasındaki en kısa mesafenin hesaplanmasına ilişkin uygulaması ise, Zonguldak ve Elazığ illerimizin Tablo 5'deki coğrafi koordinatları ile (10) ve (11) numaralı eşitlikleri kullanılarak yapılan hesaplama sonucu 703 km bulunmuştur. Oysaki bu iki ilimiz arasındaki karayolu uzunluğu 1029 km dir. Küre yüzeyinde coğrafi koordinatları bilinen iki noktadan birinden diğerine giden doğrultu yanında en kısa uzunluk da önemlidir. En kısa uzunluğun kullanıldığı denizcilik ve havacılıktaki diğer karşılığı ise uzay açıdır. Bu nedenle düzlem ve küredeki uzay açıların işlevleri tamamen birbirinden farklıdır.

Kaynaklar

[1] Documents Concerning the New Definition of Metre, Metrologia, 19,163-177, 1984.
[2] Moore W R. Foundation of Mechanical Accuracy, 1970.

[3] Busch T. Fundamentals of Dimensional Metrology, Wilkie Brothers Foundation, Second Edition, Newyork, copright, 1989.
[4] Brezina. Gundlagen der Winkelmesstechnik, Berlin: Verl. Technick, 1986.
[5] Karaböce N Tiftikçi, A. Açı Standartları ve Açı Ölçümlerinde İzlenebilirlik, II. Ulusal Ölçümbilim Kongresi Bildiriler, Ekim, 1989.
[6] Benz W. Ebene Geometrie, Einführung in Theorie und Anwendung, Heidelberg, Akad. Verl. 1997.
[7] Akarsu V. Düzlem Trigonometri Ders Notları, ZKÜ, 2005.
[8] Bektaş S. Yatay, Düşey ve Uzay Açılar Arasındaki İlişki, HKMO Dergisi, s.86, Ankara,1999.
[9] Süer B. Küresel Geometri, GÜ.Fen-Edebiyat Fakültesi Yayın No. 28, Ankara, 1993.
[10] Yaşayan A, Hekimoğlu Ş. Küresel Trigonometri, KTÜ, Yer Bilimleri Fakültesi, Yayın No : 143 / 22 , Trabzon, 1982.
[11] Sigl R. Ebene und Sphaerische Trigonometri mit Anwendungen auf Kartographie, Geodesie und Astronomie, Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1977.
[12] Deumlich F, Staiger R. Instrumentenkunde der Vermessungstechnik, 9. völlig neu bearb. und erw. Aufl. Heidelberg: Wichmann, 2002.
[13] Arfken GB, Weber HJ. Mathematical Methods for Physicists, International Edition, Academic Press, London, 1995.
[14] Grossmann W. Vermessungskunde II, Horizontalaufnahmen und ebene Rechnungen.Walter de Gruyter, Berlin, 1967.
[15] Kahmen H. Vermessungskunde, 18., völlig neu bearbeitete und erweiterte Auflage, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1999.
[16] Ergin N, İnal C. Ölçme Bilgisi-2 Ders Notları. Selçuk Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Yayın No : 22, Konya, 1995.
[17] Haritacılık Terimleri Sözlüğü, Harita Genel Komutanlığı Matbaası, HGKS 125-1, Ankara, 2003.
[18] Resnik B, Bill R. Vermessungskunde für den Planungs-, Bau- und Umweltbereich, Herbert Wichman Verlag, Hüthig, Heidelberg, 2003.